CHAPITRE 12

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Il existe de nombreuses méthodes numériques de résolution des équations aux dérivées partielles (Ralston et Wilf, D. D. McCracken, A. D. Booth, J. Girerd, E. Durand, voir bibliographie).

Nous exposerons ici la méthode des différences finies en l'appliquant à la résolution de l'équation de Laplace, mais le lecteur pourra reconduire cette méthode pour résoudre d'autres types d'équations telles que l'équation de Poisson, l'équation des cordes vibrantes, l'équation de diffusion...

12.1. — ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES FINIES

Ayant à résoudre une équation de deux variables du type :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

on peut quadriller le plan x, y par des droites : x = constante et y = constante, chaque nœud du réseau ainsi obtenu étant repéré par deux indices I et J.

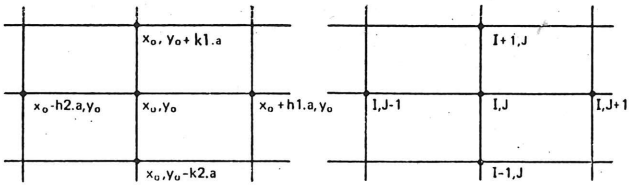


FIG. 49.

En un point de coordonnées x, y, on peut appliquer la formule de Taylor arrêtée au second ordre, soit :

$$V(x, y) = V(x_0, y_0) + \frac{\partial V}{\partial x_0} \cdot dx + \frac{\partial V}{\partial y_0} \cdot dy + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial x_0^2} \cdot dx^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial x_0 \cdot \partial y_0} \cdot dx \cdot dy + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial y_0^2} \cdot dy^2$$

Si on applique cette formule aux quatre points du réseau ci-dessus, il vient :

$$V(x_0 + h1\cdot a, y_0) = V(x_0, y_0) + h1\cdot a\cdot \frac{\partial V}{\partial x_0} + \frac{h1^2\cdot a^2}{2}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial x_0^2}$$

$$V(x_0 - h2\cdot a, y_0) = V(x_0, y_0) - h2\cdot a\cdot \frac{\partial V}{\partial x_0} + \frac{h2^2\cdot a^2}{2}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial x_0^2}$$

$$V(x_0, y_0 + k1\cdot a) = V(x_0, y_0) + k1\cdot a\cdot \frac{\partial V}{\partial y_0} + \frac{k1^2\cdot a^2}{2}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial y_0^2}$$

$$V(x_0, y_0 - k2\cdot a) = V(x_0, y_0) - k2\cdot a\cdot \frac{\partial V}{\partial y_0} + \frac{k2^2\cdot a^2}{2}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial y_0^2}$$

On peut multiplier la première équation par :

$$\frac{1}{h1\cdot(h1 + h2)}$$

la deuxième équation par :

$$\frac{1}{h2\cdot(h1 + h2)}$$

la troisième équation par :

$$\frac{1}{k1\cdot(k1 + k2)}$$

et la quatrième équation par :

$$\frac{1}{k2\cdot(k1 + k2)}$$

On obtient ainsi un nouveau système de quatre équations, on peut additionner les deux premières entre elles et les deux dernières entre elles puis les regrouper obtenant ainsi :

$$\frac{a^2}{2}\cdot\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y_0^2}\right]$$

$$= \frac{1}{h1+h2}\left[\frac{V(x_0+h1\cdot a, y_0)}{h1} + \frac{V(x_0-h2\cdot a, y_0)}{h2}\right]$$

$$+ \frac{1}{k1+k2}\left[\frac{V(x_0, y_0+k1\cdot a)}{k1} + \frac{V(x_0, y_0-k2\cdot a)}{k2}\right] - \left[\frac{1}{h1\cdot h2} + \frac{1}{k1\cdot k2}\right]\cdot V(x_0, y_0)$$

ou en repassant en notations indicielles :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y_0^2} = \frac{2}{a^2}\cdot\left\{\frac{1}{h1 + h2}\left[\frac{V(I, J + 1)}{h1} + \frac{V(I, J - 1)}{h2}\right]\right.$$

$$\left. + \frac{1}{k1 + k2} + \left[\frac{V(I + 1, J)}{k1} + \frac{V(I - 1, J)}{k2}\right] - \left[\frac{1}{h1\cdot h2} + \frac{1}{k1\cdot k2}\right]\cdot V(I, J)\right\}$$

L'équation de Laplace $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$ prend donc la forme :

$$\left[\frac{1}{h1 \cdot h2} + \frac{1}{k1 \cdot k2}\right] \cdot V(I, J)$$
$$= \frac{1}{h1+h2} \cdot \left[\frac{V(I, J+1)}{h1} + \frac{V(I, J-1)}{h2}\right] + \frac{1}{k1+k2} \cdot \left[\frac{V(I+1, J)}{k1} + \frac{V(I-1, J)}{k2}\right]$$

Si on suppose $h1 = h2 = h$ et $k1 = k2 = k$; il vient :

$$2 \cdot \left(1 + \frac{h^2}{k^2}\right) \cdot V(I, J) = V(I, J+1) + V(I, J-1) + \frac{h^2}{k^2} V(I+1, J) + \frac{h^2}{k^2} V(I-1, J)$$

et si on suppose encore $h = k$; il vient :

$$4 \cdot V(I, J) = V(I, J+1) + V(I, J-1) + V(I+1, J) + V(I-1, J)$$

On voit dans ce calcul que les dérivées impaires disparaissent car il y a alternance de $+ a$ et de $- a$. Les équations ci-dessus sont donc équivalentes à l'équation de Laplace à des dérivées d'ordre 4 près.

12.2. — MÉTHODE DE RELAXATION

Si on écrit les équations aux différences finies pour chaque nœud du réseau, on obtient un système d'équations :

$$2 \cdot h1 \cdot h2 \left[\frac{1}{h1 \cdot h2} + \frac{1}{k1 \cdot k2}\right] \cdot V(I, J) = \frac{2 \cdot h1 \cdot h2}{h1 + h2} \cdot \left[\frac{V(I, J+1)}{h1} + \frac{V(I, J-1)}{h2}\right]$$
$$+ \frac{2 \cdot h1 \cdot h2}{k1 + k2} \cdot \left[\frac{V(I+1, J)}{k1} + \frac{V(I-1, J)}{k2}\right]$$

Comme les valeurs de V sont connues sur les frontières, le système d'équations ci-dessus a un nombre d'inconnues égal au nombre d'équations. C'est un système linéaire que l'on peut résoudre en utilisant le sous-programme SYLEQ étudié au paragraphe 6.1. Généralement le nombre de nœuds du réseau est important et le temps de calcul risque de devenir prohibitif, aussi préfère-t-on utiliser une méthode par approximation.

On effectue une première approximation de la fonction V en chaque nœud du réseau. Les valeurs prises au départ sont quelconques, mais on convergera d'autant plus rapidement que l'on choisira des valeurs proches de la solution du système.

On choisit alors un ordre de parcours du réseau, cet ordre est arbitraire mais à chaque nouvelle itération on devra parcourir le réseau dans l'ordre choisi initialement.

En chaque nœud (I, J), on calcule un résidu :

$$\mathrm{RES} = \frac{2\cdot h1\cdot h2}{h1+h2}\left[\frac{\mathrm{V(I,J+1)}}{h1} + \frac{\mathrm{V(I,J-1)}}{h2}\right] + \frac{2\cdot h1\cdot h2}{k1+k2}\left[\frac{\mathrm{V(I+1,J)}}{k1} + \frac{\mathrm{V(I-1,J)}}{k2}\right]$$
$$-2.h1\cdot h2\cdot\left[\frac{1}{h1\cdot h2} + \frac{1}{k1\cdot k2}\right]\cdot \mathrm{V(I,J)}$$

La nouvelle valeur de la fonction V en ce point est recalculée de manière à annuler le résidu en ce point, soit :

$$\mathrm{V'(I,J)} = \mathrm{V(I,J)} + \mathrm{RES}\Big/\left[2\cdot h1\cdot h2\cdot\left(\frac{1}{h1\cdot h2} + \frac{1}{k1\cdot k2}\right)\right]$$

On passe alors au nœud suivant dans l'ordre de parcours choisi et on calcule le résidu en ce point à partir des nouvelles valeurs de la fonction V aux nœuds encadrant ce point.

Lorsque l'on a parcouru ainsi tout le réseau, on recommence au premier nœud du réseau et on calcule de nouveaux résidus et de nouvelles valeurs de V. On démontre qu'en chaque nœud du réseau, on obtient ainsi une suite qui est convergente et dont la limite est la solution du système.

S'étant fixé une précision, on s'arrêtera donc lorsque tous les résidus correspondant à une itération seront inférieurs à cette précision.

Remarquons que si on suppose $h1 = h2 = h$ et $k1 = k2 = k$, le résidu s'exprime :

$$\mathrm{RES} = \mathrm{V(I,J+1)} + \mathrm{V(I,J-1)} + \frac{h^2}{k^2}[\mathrm{V(I+1,J)} + \mathrm{V(I-1,J)}] - 2\cdot\left(1 + \frac{h^2}{k^2}\right)\cdot \mathrm{V(I,J)}$$

et la nouvelle valeur de la fonction V :

$$\mathrm{V'(I,J)} = \mathrm{V(I,J)} + \mathrm{RES}\Big/\left[2\cdot\left(1 + \frac{h^2}{k^2}\right)\right]$$

enfin, dans le cas où $h = k$, on a :

$$\mathrm{RES} = \mathrm{V(I,J+1)} + \mathrm{V(I,J-1)} + \mathrm{V(I+1,J)} + \mathrm{V(I-1,J)} - 4\cdot\mathrm{V(I,J)}$$

et :

$$\mathrm{V'(I,J)} = \mathrm{V(I,J)} + \mathrm{RES}/4$$

12.3. — MÉTHODE DE SURRELAXATION

On peut accélérer la convergence de la méthode en introduisant dans les relations ci-dessus un facteur d'accélération.

C'est-à-dire que la relation :

$$V'(I, J) = V(I, J) + RES \Big/ \left[2 \cdot h1 \cdot h2 \cdot \left(\frac{1}{h1 \cdot h2} + \frac{1}{k1 \cdot k2}\right)\right]$$

est remplacée par la relation :

$$V'(I,J) = V(I,J) + \omega \cdot RES \Big/ \left[2 \cdot h1 \cdot h2 \cdot \left(\frac{1}{h1 \cdot h2} + \frac{1}{k1 \cdot k2}\right)\right]$$

Young (voir l'ouvrage de Ralston et Wilf en bibliographie) a montré que si, pour une enceinte rectangulaire, I varie de 1 à M + 1 et J de 1 à N + 1, on peut prendre pour valeur de ω

$$\omega = 1 + \left(\frac{\frac{1}{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{M}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{N}\right)\right]}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{4} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{M}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{N}\right)\right]^2}} \right)^2$$

12.4. — AMÉLIORATION POSSIBLE DE LA PRÉCISION

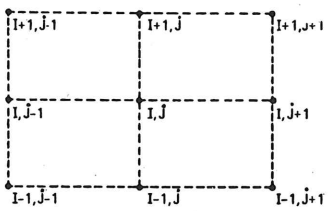
En un point de coordonnées x, y, on peut appliquer la formule de Taylor arrêtée au sixième ordre, soit :

$$\begin{aligned}
V = V_0 &+ (x-x_0) \cdot \frac{\partial V}{\partial x_0} + (y-y_0) \cdot \frac{\partial V}{\partial y_0} + \\
&\frac{1}{2!} \cdot \left[(x-x_0)^2 \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial x_0^2} + 2 \cdot (x-x_0) \cdot (y-y_0) \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial x_0 \cdot \partial y_0} + (y-y_0)^2 \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial y_0^2}\right] \\
&\frac{1}{3!} \cdot \left[(x-x_0)^3 \cdot \frac{\partial^3 V}{\partial x_0^3} + 3 \cdot (x-x_0)^2 \cdot (y-y_0) \cdot \frac{\partial^3 V}{\partial x_0^2 \cdot \partial y_0} + 3 \cdot (x-x_0) \cdot (y-y_0)^2 \right. \\
&\left. \cdot \frac{\partial^3 V}{\partial x_0 \cdot \partial y_0^2} + (y-y_0)^3 \cdot \frac{\partial^3 V}{\partial y_0^3}\right] + \\
&\frac{1}{4!} \cdot \left[(x-x_0)^4 \cdot \frac{\partial^4 V}{\partial x_0^4} + 4 \cdot (x-x_0)^3 \cdot (y-y_0) \cdot \frac{\partial^4 V}{\partial x_0^3 \cdot \partial y_0} + 6 \cdot (x-x_0)^2 \cdot (y-y_0)^2 \right. \\
&\left. \cdot \frac{\partial^4 V}{\partial x_0^2 \cdot \partial y_0^2} + 4 \cdot (x-x_0) \cdot (y-y_0)^3 \cdot \frac{\partial^4 V}{\partial x_0 \cdot \partial y_0^3} + (y-y_0)^4 \cdot \frac{\partial^4 V}{\partial y_0^4}\right] + \\
&\frac{1}{5!} \cdot \left[(x-x_0)^5 \cdot \frac{\partial^5 V}{\partial x_0^5} + 5 \cdot (x-x_0)^4 \cdot (y-y_0) \cdot \frac{\partial^5 V}{\partial x_0^4 \cdot \partial y_0} + 10 \cdot (x-x_0)^3 \cdot (y-y_0)^2 \right. \\
&\left. \cdot \frac{\partial^5 V}{\partial x_0^3 \cdot \partial y_0^2} + 10 \cdot (x-x_0)^2 \cdot (y-y_0)^3 \cdot \frac{\partial^5 V}{\partial x_0^2 \cdot \partial y_0^3} + 5 \cdot (x-x_0) \cdot (y-y_0)^4 \cdot \frac{\partial^5 V}{\partial x_0 \cdot \partial y_0^4} \right. \\
&\left. + (y-y_0)^5 \cdot \frac{\partial^5 V}{\partial y_0^5}\right] +
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{6!}\cdot\left[(x-x_0)^6\cdot\frac{\partial^6 V}{\partial x_0^6}+6\cdot(x-x_0)^5\cdot(y-y_0)\cdot\frac{\partial^6 V}{\partial x_0^5\cdot\partial y_0}+15\cdot(x-x_0)^4\cdot(y-y_0)^2\right.$$
$$\cdot\frac{\partial^6 V}{\partial x_0^4\cdot\partial y_0^2}+20\cdot(x-x_0)^3\cdot(y-y_0)^3\cdot\frac{\partial^6 V}{\partial x_0^3\cdot\partial y_0^3}+15\cdot(x-x_0)^2\cdot(y-y_0)^4$$
$$\left.\cdot\frac{\partial^6 V}{\partial x_0^2\cdot\partial y_0^4}+6\cdot(x-x_0)\cdot(y-y_0)^5\cdot\frac{\partial^6 V}{\partial x_0\cdot\partial y_0^5}+(y-y_0)^6\cdot\frac{\partial^6 V}{\partial y_0^6}\right]$$

On peut l'appliquer aux huit points entourant le point *xo, yo* :

FIG. 50.



Au nœud I,J+1, on a :	$x-xo=a$	et	$y-yo=0$
Au nœud I+1,J, on a :	$x-xo=0$	et	$y-yo=a$
Au nœud I,J−1, on a :	$x-xo=-a$	et	$y-yo=0$
Au nœud I−1,J, on a :	$x-xo=0$	et	$y-yo=-a$
Au nœud I+1,J+1, on a :	$x-xo=a$	et	$y-yo=a$
Au nœud I+1,J−1, on a :	$x-xo=-a$	et	$y-yo=a$
Au nœud I−1,J−1, on a :	$x-xo=-a$	et	$y-yo=-a$
Au nœud I−1,J+1, on a :	$x-xo=a$	et	$y-yo=-a$

On peut donc écrire :

$$V(I,J+1)+V(I+1,J)+V(I,J-1)+V(I-1,J)=$$
$$4\cdot V(I,J)+a^2\cdot\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right]+\frac{a^4}{12}\cdot\left[\frac{\partial^4 V}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 V}{\partial y^4}\right]+\frac{2\cdot a^6}{6!}\cdot\left[\frac{\partial^6 V}{\partial x^6}+\frac{\partial^6 V}{\partial y^6}\right]$$

et :

$$V(I+1,J+1)+V(I+1,J-1)+V(I-1,J-1)+V(I-1,J+1)$$
$$=4\cdot V(I,J)+\frac{4\cdot a^2}{2!}\cdot\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right]+\frac{4\cdot a^4}{4!}\cdot\left[\frac{\partial^4 V}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 V}{\partial y^4}+6\cdot\frac{\partial^4 V}{\partial x^2\cdot\partial y^2}\right]$$
$$+\frac{4\cdot a^6}{6!}\cdot\left[\frac{\partial^6 V}{\partial x^6}+\frac{\partial^6 V}{\partial y^6}+15\cdot\frac{\partial^6 V}{\partial x^4\cdot\partial y^2}+15\cdot\frac{\partial^6 V}{\partial x^2\cdot\partial y^4}\right]$$

Si on multiplie la première équation par le nombre 4 et si on l'ajoute à la deuxième, il vient :

$$4\cdot[V(I,J+1)+V(I+1,J)+V(I,J-1)+V(I-1,J)]+V(I+1,J+1)+V(I+1,J-1)$$
$$+V(I-1,J-1)+V(I-1,J+1)=20\cdot V(I,J)+6\cdot a^2\cdot\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right]$$

$$+\frac{4\cdot a^4}{12}\cdot\left[\frac{\partial^4 V}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 V}{\partial y^4}\right]+\frac{2\cdot a^4}{12}\cdot\left[\frac{\partial^4 V}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 V}{\partial y^4}+6\cdot\frac{\partial^4 V}{\partial x^2\cdot\partial y^2}\right]$$

$$+\frac{8\cdot a^6}{6\,!}\cdot\left[\frac{\partial^6 V}{\partial x^6}+\frac{\partial^6 V}{\partial y^6}\right]+\frac{4\cdot a^6}{6\,!}\cdot\left[\frac{\partial^6 V}{\partial x^6}+\frac{\partial^6 V}{\partial y^6}+15\cdot\frac{\partial^6 V}{\partial x^4\cdot\partial y^2}+15\cdot\frac{\partial^6 V}{\partial y^2\cdot\partial y^4}\right]$$

Partant de la relation : $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0$ que l'on peut dériver plusieurs fois par rapport à x et y, on montre facilement que cette équation se réduit à :

$$4.[V(I, J+1)+V(I+1, J)+V(I, J-1)+V(I-1, J)]+V(I+1, J+1)$$
$$+V(I+1, J-1)+V(I-1, J-1)+V(I-1, J+1)=20\cdot V(I,J)$$

ou enfin :

$$4\cdot V(I, J)=\frac{4}{5}\cdot[V(I, J+1)+V(I+1, J)+V(I, J-1)+V(I-1, J)]$$
$$+\frac{1}{5}\cdot[V(I+1, J+1)+V(I+1, J-1)+V(I-1, J-1)+V(I-1, J+1)]$$

Du fait que les termes impairs s'annulent, les équations ci-dessus sont donc équivalentes à l'équation de Laplace à des dérivées d'ordre 8 près.

12.5. — DÉTERMINATION DU PAS DE QUADRILLAGE

Il est bien évident que la formule de Taylor arrêtée au second ordre sera d'autant plus précise que le pas : a du quadrillage sera faible. Mais, par ailleurs, plus ce pas sera faible et plus l'occupation mémoire et le temps calcul seront grands.

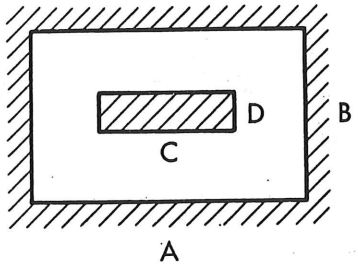
Suivant que l'on applique la formule à quatre points ou la formule à huit points, le premier terme négligé est une puissance quatrième ou une puissance huitième du pas de quadrillage.

Ayant calculé la solution de l'équation de Laplace avec un quadrillage de pas : a en appliquant la formule à quatre points; pour savoir si le pas choisi est assez fin, on recalcule la solution avec le même quadrillage mais en utilisant la formule à huit points. On regarde alors si les résultats sont différents à la précision que l'on s'est fixée, sinon on passe à un réseau plus fin.

12.6. — APPLICATION A LA DÉTERMINATION DU POTENTIEL A L'INTÉRIEUR D'UN COAXIAL RECTANGULAIRE

Nous allons appliquer les principes précédents à la détermination du potentiel à l'intérieur du coaxial rectangulaire suivant (fig. 51) :

FIG. 51.



B/A = 0,5
C/A = 0,5
D/B = 0,5

Le conducteur extérieur étant porté au potentiel + 1 et le conducteur intérieur au potentiel 0.

Le potentiel à l'intérieur du coaxial obéit à l'équation de Laplace, on peut donc quadriller l'espace inter-conducteurs comme représenté sur la figure 52 et écrire un programme Fortran de résolution.

```
      DIMENSIØN V(13,25)
      READ(IL,101)P,PV,ØMEGA
101   FØRMAT(F16.7)
      READ(IL,102)MAXIT
102   FØRMAT(I6)
      WRITE(IW,103)
103   FØRMAT(//' B/A = 0.5')
      WRITE(IW,104)
104   FØRMAT(' C/A = 0.5')
      WRITE(IW,105)
105   FØRMAT(' D/B = 0.5'//)
      V1 = .0
      V2 = 1.
      DØ 1 J=1,25
      V(1,J) = V2
1     V(13,J) = V2
      DØ 2 I=2,12
      V(I,1) = V2
2     V(I,25) = V2
      DØ 3 J=7,19
      V(4,J) = V1
3     V(10,J) = V1
      DØ 4 I=5,9
      V(I,7) = V1
4     V(I,19) = V1
      DØ 50 J=2,24
      V(3,J) = (V2-V1)/3.
      V(2,J) = 2.*(V2-V1)/3.
      V(11,J) = (V2-V1)/3.
      V(12,J) = 2.*(V2-V1)/3.
```

13,1	13,2	13,3	13,4	13,5	13,6	13,7	13,8	13,9	13,10	13,11	13,12	13,13	13,14	13,15	13,16	13,17	13,18	13,19	13,20	13,21	13,22	13,23	13,24	13,25
12,1	12,2	12,3	12,4	12,5	12,6	12,7	12,8	12,9	12,10	12,11	12,12	12,13	12,14	12,15	12,16	12,17	12,18	12,19	12,20	12,21	12,22	12,23	12,24	12,25
11,1	11,2	11,3	11,4	11,5	11,6	11,7	11,8	11,9	11,10	11,11	11,12	11,13	11,14	11,15	11,16	11,17	11,18	11,19	11,20	11,21	11,22	11,23	11,24	11,25
10,1	10,2	10,3	10,4	10,5	10,6	10,7	10,8	10,9	10,10	10,11	10,12	10,13	10,14	10,15	10,16	10,17	10,18	10,19	10,20	10,21	10,22	10,23	10,24	10,25
9,1	9,2	9,3	9,4	9,5	9,6	9,7	9,8	9,9	9,10	9,11	9,12	9,13	9,14	9,15	9,16	9,17	9,18	9,19	9,20	9,21	9,22	9,23	9,24	9,25
8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9	8,10	8,11	8,12	8,13	8,14	8,15	8,16	8,17	8,18	8,19	8,20	8,21	8,22	8,23	8,24	8,25
7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,9	7,10	7,11	7,12	7,13	7,14	7,15	7,16	7,17	7,18	7,19	7,20	7,21	7,22	7,23	7,24	7,25
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9	6,10	6,11	6,12	6,13	6,14	6,15	6,16	6,17	6,18	6,19	6,20	6,21	6,22	6,23	6,24	6,25
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9	5,10	5,11	5,12	5,13	5,14	5,15	5,16	5,17	5,18	5,19	5,20	5,21	5,22	5,23	5,24	5,25
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	4,10	4,11	4,12	4,13	4,14	4,15	4,16	4,17	4,18	4,19	4,20	4,21	4,22	4,23	4,24	4,25
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	3,10	3,11	3,12	3,13	3,14	3,15	3,16	3,17	3,18	3,19	3,20	3,21	3,22	3,23	3,24	3,25
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	2,10	2,11	2,12	2,13	2,14	2,15	2,16	2,17	2,18	2,19	2,20	2,21	2,22	2,23	2,24	2,25
1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	1,10	1,11	1,12	1,13	1,14	1,15	1,16	1,17	1,18	1,19	1,20	1,21	1,22	1,23	1,24	1,25

FIG. 52.

```
50    CØNTINUE
      DØ 51 I=4,10
      V(I,6) = (V2−V1)/6.
      V(I,5) = 2.*(V2−V1)/6.
      V(I,4) = 3.*(V2−V1)/6.
      V(I,3) = 4.*(V2−V1)/6.
      V(I,2) = 5.*(V2−V1)/6.
      V(I,20) = (V2−V1)/6.
      V(I,21) = 2.*(V2−V1)/6.
      V(I,22) = 3.*(V2−V1)/6.
      V(I,23) = 4.*(V2−V1)/6.
      V(I,24) = 5.*(V2−V1)/6.
51    CØNTINUE
      ITN = 1
10    RESID = .0
      DØ 5 I=2,12
      DØ 5 J=2,24
      IF(I−4)6,7,7
7     IF(I−10)8,8,6
8     IF(J−7)6,9,9
9     IF(J−19)5,5,6
6     RES = V(I−1,J)+V(I+1,J)+V(I,J−1)+V(I,J+1)−4.*V(I,J)
      IF(ABS(RES)−RESID)13,13,12
12    RESID = ABS(RES)
13    V(I,J) = V(I,J)+ØMEGA*RES/4.
5     CØNTINUE
      IF(RESID−P)60,61,61
61    ITN = ITN + 1
      IF(ITN−MAXIT)10,10,62
62    WRITE(IW,106)MAXIT
106   FØRMAT(/' ØN NE CØNVERGE PAS APRES'I6' RELAXATIØNS'/)
      GØ TØ 70
60    DØ 75 I=2,12
      DØ 75 J=2,24
      IF(I−4)76,77,77
77    IF(I−10)78,78,76
78    IF(J−7)76,79,79
79    IF(J−19)75,75,76
76    VAUX = V(I,J)
      V(I,J)=0.2*(V(I,J+1)+V(I+1,J)+V(I,J−1)+V(I−1,J))+0.05*(V(I+1,J+1)
     2 +V(I+1,J−1)+V(I−1,J−1)+V(I−1,J+1))
      IF(ABS(V(I,J)−VAUX)−PV)75,75,151
75    CØNTINUE
      GØ TØ 152
151   WRITE(IW,153)
153   FØRMAT(//' IL FAUT UTILISER UN RESEAU PLUS FIN'/)
      GØ TØ 70
```

Il suffit alors d'écrire, en l'instruction 152, un ordre d'impression des potentiels et en fin de programme, une instruction PAUSE numérotée : 70.

Remarquons que l'on peut réduire l'occupation mémoire et le temps de calcul en tenant compte de la symétrie par rapport à la ligne : I = 7.

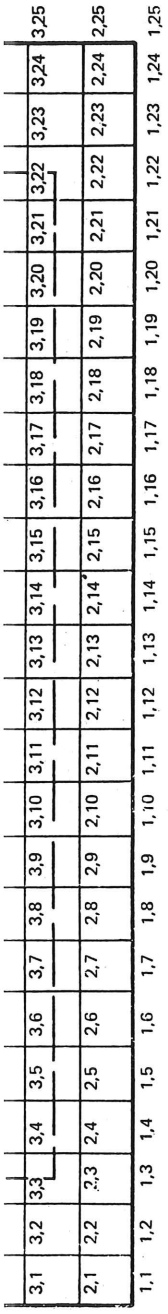


FIG. 52.

On a :

$$V(8, J) = V(6, J)$$

et l'équation de Laplace pour la ligne : I = 7 peut s'écrire :

$$4 \cdot V(7, J) = V(7, J - 1) + V(7, J + 1) + 2 \cdot V(6, J)$$

Donc le résidu pour les points : (7,2), (7,3), 7,4), (7,5), (7,6), (7,20), (7,21), (7,22), (7,23), (7,24) peut se calculer par :

$$RES = V(I, J - 1) + V(I, J + 1) + 2 \cdot V(I - 1, J) - 4 \cdot V(I, J)$$

12.7. — DÉTERMINATION DES CARACTÉRISTIQUES D'UNE LIGNE DE TRANSMISSION A PARTIR DE LA DISTRIBUTION DE POTENTIEL

Connaissant la distribution du potentiel à l'intérieur d'une ligne formée de deux conducteurs parallèles à un axe *oz* et parcourue par des ondes planes, on peut déterminer diverses caractéristiques de la ligne par l'application du théorème de Gauss (H. E. Green, W. S. Metcalf, voir bibliographie).

Ayant quadrillé comme précédemment l'espace inter-conducteurs, on peut entourer la section du conducteur intérieur par un rectangle passant par les centres de certains carrés du réseau. On peut alors déterminer le flux Φ du vecteur Déplacement à travers la surface de hauteur unité selon l'axe *oz* et ayant pour base le rectangle défini ci-dessus.

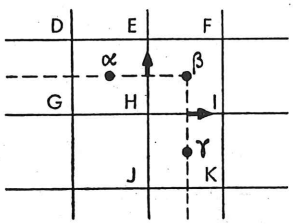


FIG. 53.

Le flux $d\Phi_{\alpha\beta}$ (fig. 53) à travers la surface rectangulaire de base $\alpha\beta$ et de hauteur $\Delta z = 1$ est :

$$d\Phi_{\alpha\beta} = -\varepsilon \cdot \overrightarrow{\text{grad } V} \cdot \overrightarrow{dS}$$

où ε est la permittivité du milieu.

Soit :

$$d\Phi_{\alpha\beta} = \int_{\alpha}^{\beta} -\varepsilon \cdot \frac{\partial V}{\partial y} \cdot dx$$

$$d\Phi_{\alpha\beta} = -\varepsilon \cdot \frac{(VE - VH)}{EH} \cdot \alpha\beta$$